

# प्रश्न बैंक विषय-गणित

कक्षा 12 वीं

वर्ष : 2025-2026

त्रैमासिक परीक्षा के लिए

नोट: विषय शिक्षक स्वयं भी प्रश्न बैंक में दिए प्रश्नों को जार्चें। ब्लू प्रिंट/अंक योजना के आधार पर विषय शिक्षक प्रश्न पत्र तैयार करें। सुनिश्चित करें कि प्रश्न पत्र में किसी प्रश्न की कोई पुनरावृत्ति न हो।

लोक शिक्षण संचालनालय, मध्यप्रदेश

## त्रैमासिक परीक्षा 2025-26

कक्षा : 12वीं

पूर्णांक : 80

विषय : गणित

समय : 3:00 घंटे

सं. क्र.	अध्याय	बहुविक ल्पीय प्रश्न	रिक्त स्थान प्रश्न	सत्य- असत्य प्रश्न	सही जोड़ी मिलाइए प्रश्न	एक वाक्य में उत्तर प्रश्न	प्रश्न 2-अंक	प्रश्न 3-अंक	प्रश्न 4-अंक	कुल प्रश्न	कुल अंक
1	अध्याय-1 सम्बन्ध एवं फलन	1	1	1	1	1	03	01	-	04	14
2	अध्याय-2 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन	1	1	1	1	02	01	01	01	03	15
3	अध्याय-3 आव्यूह	1	1	1	1	1	02	01	-	03	12
4	अध्याय-4 सारणिक	1	1	1	02	1	01	-	01	02	12
5	अध्याय-5 सातत्य तथा अवकलनीयता	1	1	1	1	1	02	01	01	04	16
6	अध्याय-6 अवकलज के अनुप्रयोग	1	1	1	1	1	01	-	01	02	11
	योग	6	6	6	07	07	10	04	04	18	80

नोट:

- प्रश्न क्रमांक 1 से 5 तक 32 वस्तुनिष्ठ प्रश्न होंगे प्रत्येक प्रश्न पर एक अंक निर्धारित है। प्रश्न निम्नानुसार रहेंगे-  
प्रश्न क्रमांक 1 - सही विकल्प 06,  
प्रश्न क्रमांक 2 - रिक्त स्थान 06,  
प्रश्न क्रमांक 3 - सत्य/असत्य 06,  
प्रश्न क्रमांक 4 - सही-जोड़ी 07,  
प्रश्न क्रमांक 5 - एक वाक्य में उत्तर 07,
- प्रश्न क्रमांक - 6 से 15 तक कल 10 प्रश्न होंगे। प्रत्येक प्रश्न पर 02 अंक निर्धारित है।
- प्रश्न क्रमांक - 16 से 19 तक कल 04 प्रश्न होंगे। प्रत्येक प्रश्न पर 03 अंक निर्धारित है।
- प्रश्न क्रमांक - 20 से 23 तक कल 04 प्रश्न होंगे। प्रत्येक प्रश्न पर 04 अंक निर्धारित है।

## अध्याय 1 संबंध एवं फलन

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए -

- (i) यदि समुच्चय  $\{1, 2, 3\}$  में  $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$  द्वारा प्रदत्त संबंध है :  
 (a) केवल सममित (b) केवल स्वतुल्य (c) केवल संक्रामक (d) एक तुल्यता संबंध
- (ii) यदि फलन  $f: R \rightarrow R$  जो  $f(x) = 3x$  द्वारा परिभाषित है तो फलन  $f$ :  
 (a) एकेकी आच्छादक है। (b) एकेकी है किन्तु आच्छादक नहीं है।  
 (c) आच्छादक है किन्तु एकेकी नहीं (d) एकेकी आच्छादक दोनों नहीं है।
- (iii) यदि फलन  $f: N \rightarrow N$  जो  $f(x) = 2x$  द्वारा परिभाषित है तो फलन  $f$ :  
 (a) एकेकी आच्छादक है। (b) एकेकी है किन्तु आच्छादक नहीं है।  
 (c) आच्छादक है किन्तु एकेकी नहीं (d) एकेकी आच्छादक दोनों नहीं है।
- (iv) यदि समुच्चय  $\{1, 2, 3, 4\}$  में  $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (2, 1), (3, 1)\}$  द्वारा प्रदत्त संबंध है तो:  
 (a) स्वतुल्य तथा सममित है किन्तु संक्रामक नहीं है।  
 (b) स्वतुल्य तथा संक्रामक है किन्तु सममित नहीं है।  
 (c) सममित तथा संक्रमक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।  
 (d) एक तुल्यता संबंध है।
- (v) यदि  $A = \{1, 2, 3\}$  हो निम्न में से कौन सा तुल्यता संबंध नहीं है:  
 (a)  $\{(1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$  (b)  $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$   
 (c)  $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$  (d) इनमें से कोई नहीं
- (vi) माना समुच्चय  $N$  में  $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$  द्वारा प्रदत्त संबंध है तब निम्न में से सही उत्तर चुनिए:  
 (a)  $(2, 4) \in R$  (b)  $(3, 8) \in R$  (c)  $(6, 8) \in R$  (d)  $(8, 7) \in R$
- (vii) दिए गए समुच्चय  $A = \{a, b, c\}$  के लिए एक तत्समक संबंध होगा:  
 (a)  $R = \{(a, b), (a, c)\}$  (b)  $R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$   
 (c)  $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c)\}$  (d)  $R = \{(c, a), (b, a), (a, a)\}$
- (viii) माना  $f: R \rightarrow R$ ,  $f(x) = x^4$  द्वारा परिभाषित है तो:  
 (a)  $f$  एकेकी आच्छादक है। (b)  $f$  बहुएक आच्छादक नहीं है।  
 (c)  $f$  एकेकी पर आच्छादक नहीं (d)  $f$  न एकेकी है और न आच्छादक।
- (ix) माना  $f: R \rightarrow R$ , इस प्रकार परिभाषित है कि  $f(x) = 3x - 4$  तब  $f^{-1}(x) =$   
 (a)  $\frac{x+4}{3}$  (b)  $\frac{x}{3} - 4$  (c)  $3x + 4$  (d) इनमें से कोई नहीं।
- (x) माना  $f(x) = x^2$  और  $g(x) = \sqrt{x}$  तब  
 (a)  $(gof)(x) = |x| ; x \in R$  (b)  $f \circ g = gof ; x \in R$   
 (c)  $(f \circ g)(x) = x ; x \in R$  (d) इनमें से कोई नहीं।
- (xi) माना  $f: N \rightarrow N$  इस प्रकार परिभाषित है कि  $f(x) = 3x$  जहाँ  $x \in N$  तब  $f$  होगा:  
 (a) आच्छादक (b) प्रतिलोम (c) एकेकी (d) इनमें से कोई नहीं
- (xii) यदि  $F: R \rightarrow R$  जहाँ  $F(x) = 5x - 7$   $x \in R$  तब  $f(7)$  का मान होगा :  
 (a) 0 (b) 28 (c) 14 (d) 35

- (xiii) माना समुच्चय  $A = \{1, 2, 3, 8, 10, 11\}$  और  $R$  समुच्चय  $A$  पर परिभाषित संबंध इस प्रकार है कि  $R = \{(a, b) : a - b = 4\}$  तब संबंध  $R$  होगा।  
 (a) रिक्त संबंध (b) स्वतुल्य संबंध (c) सममित संबंध (d) तुल्यता संबंध
- (xiv) माना  $R$  एक सम्बंध  $Z$  पर इस प्रकार परिभाषित है कि  $aRb \Rightarrow a \geq b$  तब  $R$  होगा  
 (a) सममित संक्रामक किन्तु स्वतुल्य नहीं (b) स्वतुल्य सममित किन्तु संक्रामक नहीं  
 (c) स्वतुल्य और संक्रामक किन्तु सममित नहीं। (d) एक तुल्यता संबंध
- (xv) माना  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 4, 6, 9\}$  और संबंध  $A$  से  $B$  पर इस प्रकार परिभाषित है कि  $x$  बड़ा है  $y$  से तब  $R$  का परिसर क्या होगा?  
 (a)  $\{1, 4, 6, 9\}$  (b)  $\{4, 6, 9\}$  (c)  $\{1\}$  (d) इनमें से कोई नहीं
- (xvi) यदि समुच्चय  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  पर संबंध  $R$  इस प्रकार परिभाषित है कि  $xRy \Rightarrow y = 3x$  तब  $R$  बराबर है।  
 (a)  $\{(3, 1)(6, 2)(8, 2)(9, 3)\}$  (b)  $\{(3, 1)(6, 2)(9, 3)\}$   
 (c)  $\{(1, 3)(2, 6)(3, 9)\}$  (d) इनमें से कोई नहीं
- (xvii) यदि  $A = \{1, 2, 3\}$  हो तो अवयव  $(1, 2)$  वाले तुल्यता संबंधों की संख्या है-  
 (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4
- (xviii) यदि  $f: R \rightarrow R$ ,  $f(x) = (3 - x^3)^{1/3}$  द्वारा प्रदत्त है तो  $(f \circ f)(x)$  का मान क्या होगा:  
 (a)  $x^{1/3}$  (b)  $x^3$  (c)  $x$  (d)  $3 - x^3$
- (xix) यदि  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$  इस प्रकार हो कि  $f(1) = a$ ,  $f(2) = b$ ,  $f(3) = c$  तब  $(f^{-1})^{-1}$  है:  
 (a)  $\{(1, a)(2, b)(3, c)\}$  (b)  $\{(a, 1)(b, 2)(c, 3)\}$   
 (c)  $\{(1, 1)(2, 2)(3, 3)\}$  (d)  $\{(a, a)(b, b)(c, c)\}$
- (xx) यदि  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$  इस प्रकार हो कि  $f(1) = a$ ,  $f(2) = b$ ,  $f(3) = c$  तब  $(f^{-1})^{-1}$  है:  
 (a)  $\{(1, a)(2, b)(3, c)\}$  (b)  $\{(a, 1)(b, 2)(c, 3)\}$   
 (c)  $\{(1, 1)(2, 2)(3, 3)\}$  (d)  $\{(a, a)(b, b)(c, c)\}$
- (xxi) यदि  $f: R \rightarrow R$ ,  $f(x) = x^2 + 1$  जहाँ  $x \in R$  द्वारा परिभाषित है तो  $(f^{-1})(5)$  का मान है:  
 (a) 26 (b) 4 (c) 2 (d) अस्तित्व नहीं है।
- (xxii)  $X$  में प्रतिबंध  $R$ ,  $(a, b) \in R$  तथा  $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$  जहाँ  $a, b, c \in X$  को संतुष्ट करने वाला सम्बंध  $R$   
 (a) सममित सम्बंध है। (b) स्वतुल्य सम्बंध है।  
 (c) संक्रामक सम्बंध है। (d) रिक्त सम्बंध है।
- (xxiii) प्रदत्त सम्बंध  $R$  रिक्त सम्बंध होगा यदि -  
 (a)  $R = \phi \subset x \times x$  (b)  $R \neq \phi \subset x \times x$  (c)  $R \subset x \times x$  (d)  $R = \phi \subset x \times x$
- (xxiv)  $f: A \rightarrow B$  एक आच्छादक फलन होगा यदि  
 (a)  $f(A) \subset B$  (b)  $f(A) \supset B$   
 (c)  $f(A) = B$  (d)  $f(A) \neq B$

(xxv) यदि  $n(A) = 3$  तथा  $n(B) = 2$  तो  $n(A \times B)$  बराबर है:

- (a) 6      (b) 2      (c) 4      (d) 3

(xxvi)  $X$  में सम्बंध  $R$  जो स्वतुल्य सममित तथा संक्रामक है वह सम्बंध कहलाता है -

- (a) तुल्यता सम्बंध      (b) सार्वत्रिक सम्बंध  
(c) रिक्त सम्बंध      (d) सममित सम्बंध

(xxvii) यदि  $A = \{1, 2, 3\}$  हो तो ऐसे सम्बन्ध जिनमें अवयव  $(1, 2)$  तथा  $(1, 3)$  हों और

जो स्वतुल्य तथा सममित हैं किन्तु संक्रामक नहीं हैं, की संख्या है :

- (a) 1      (b) 2      (c) 3      (d) 4

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

- (i) समुच्चय  $A$  पर परिभाषित कोई संबंध  $R$  स्वतुल्य सममित तथा संक्रामक है तो  $R$  एक ----- कहलाता है।
- (ii) यदि फलन  $f: X \rightarrow Y$  एक व्युत्क्रमणीय फलन है तो फलन अनिवार्यतः एकैकी तथा ----- होता है।
- (iii) यदि  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5, 6, 7\}$  तथा  $\{(1, 4)(2, 5)(3, 6)\}$   $A$  से  $B$  पर एक फलन है तो  $f$  एक-----फलन है।
- (iv)  $X$  में प्रतिबंध  $R$ ,  $(a, b) \in R$  तथा  $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$  जहाँ  $a, b, c \in X$  को संतुष्ट करने वाला सम्बंध  $R$  .....सम्बंध है।
- (v)  $X$  में इस प्रकार का सम्बंध  $R$  जो प्रतिबंध  $(a, b) \in R$  का तात्पर्य है कि  $(b, a) \in R$  को संतुष्ट करता है  $A$  .....सम्बंध है।
- (vi)  $X$  में ऐसा सम्बंध है कि फॉर ऑल  $a \in x$   $(a, a) \in R$  .....सम्बंध है।
- (vii)  $X$  में  $R = X \times X$  द्वारा प्रदत्त सम्बंध  $R$  .....सम्बंध है।
- (viii) एक फलन  $f: X \rightarrow Y$  एकैकी फलन है यदि  $f(x_1) = f(x_2)$  तब सभी  $x_1, x_2 \in x$  के लिए  $x_1 = \dots$

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए:

- (i) यदि  $A = \{1, 2, 3\}$  हो तो ऐसे संबंध जिनमें अवयव  $(1, 2)$  तथा  $(1, 3)$  हो और जो स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रामक नहीं है की संख्या 1 है
- (ii) यदि  $R_1$  तथा  $R_2$  समुच्चय  $A$  में तुल्यता संबंध है तो  $R_1 \cap R_2$  भी एक तुल्यता संबंध होगा
- (iii) यदि  $f: X \rightarrow Y$  एक फलन है  $X$  में  $R = \{(a, b): f(a) = f(b)\}$  द्वारा प्रदत्त एक संबंध है तो  $R$  एक तुल्यता संबंध नहीं है।
- (iv)  $f: X \rightarrow Y$  एक आच्छादक फलन है यदि और केवल यदि  $f$  का परिसर  $= Y$
- (v)  $f: X \rightarrow Y$  एकैकी कहलाता है यदि  $x_1, x_2 \in x$  के लिए  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

## 2 अंकीय प्रश्न:

प्र.4. रिक्त सम्बन्ध को परिभाषित कीजिए ।

प्र.5. सार्वत्रिक सम्बन्ध क्या कहलाता है ?

प्र.6. सिद्ध कीजिए कि  $R$  में  $R = \{(a, b) : a \leq b\}$  द्वारा परिभाषित संबंध स्वतुल्य तथा संक्रामक है।

प्र.7. सिद्ध कीजिए कि यदि  $f: A \rightarrow B$  तथा  $f: B \rightarrow C$  एकेकी हैं तो  $gof: A \rightarrow C$  भी एकेकी है।

प्र.8. सिद्ध कीजिए कि  $f(1) = f(2) = 1$  तथा  $x > 2$  के लिए  $f(x) = x - 1$  द्वारा प्रदत्त फलन  $f: N \rightarrow N$  आच्छादक तो है किन्तु एकेकी नहीं है।

प्र.9.  $fog$  तथा  $gof$  ज्ञात कीजिए यदि  $f(x) = 8x^3$  तथा  $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

प्र.10. यदि फलन  $f: R \rightarrow R$ ,  $f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$  द्वारा प्रदत्त है तो  $f \circ f$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्र.11. यदि फलन  $f: N \rightarrow N$ ;  $f(x) = x^2$  द्वारा प्रदत्त फलन की एकेकी तथा आच्छादी गुणों की जाँच कीजिए।

प्र.12. यदि  $A = \{1, 2, 3\}$   $B = \{4, 5, 6, 7\}$  तथा  $f = \{(1, 4) (2, 5) (3, 6)\}$   $A$  से  $B$  पर एक फलन है तो दिखाएइ कि  $f$  एकेकी है।

प्र.13. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय  $\{1, 2, 3\}$  में  $R = \{(1, 2) (2, 1)\}$  द्वारा प्रदत्त संबंध  $R$  सममित है।

प्र.14.  $f: X \rightarrow Y$  के एकेकी(One-one) होने को परिभाषित कीजिए ।

प्र.15.  $f: X \rightarrow Y$  आच्छादक होने की आवश्यक शर्त लिखिए ।

## 3 अंकीय प्रश्न:

प्र.16. तुल्यता संबंध को परिभाषित कीजिए।

प्र.17. यदि  $L$  किसी समतल में स्थित समस्त रेखाओं का एक समुच्चय है। तथा  $R = \{(L_1, L_2) : L_1, L_2$  पर लम्ब है} समुच्चय  $L$  पर परिभाषित एक सम्बन्ध है। सिद्ध कीजिए कि  $R$  सममित है किन्तु न तो स्वतुल्य है न संक्रामक है।

प्र.18. यदि  $n \in N$  के लिए  $f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & ; \text{यदि } n \text{ विषम है} \\ \frac{n}{2} & ; \text{यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$  द्वारा परिभाषित एक फलन

$f: N \rightarrow N$  है तो दिखाइए कि  $f$  एकेकी आच्छादक है।

प्र.19. यदि  $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}$ ;  $x \neq \frac{2}{3}$  में सिद्ध कीजिए कि  $f \circ f(x) = x$

प्र.20. यदि  $f: R \rightarrow R$  जहाँ  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  द्वारा परिभाषित है तो  $f(f(x))$  ज्ञात कीजिए।

प्र.21. मान लीजिए कि और दो फलन इसप्रकार है कि  $f: \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{3, 4, 5, 9\}$

और  $g: \{3, 4, 5, 9\} \rightarrow \{7, 11, 15\}$  तो  $f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5 = f(5)$

तथा  $g(3) = g(4) = 7$  एवं  $g(5) = g(9) = 11$  तो  $gof$  ज्ञात कीजिए।

प्र.22. यदि  $f: R \rightarrow R$  तथा  $g: R \rightarrow R$  फलन  $f(x) = \cos x$  तथा  $g(x) = 3x^2$  द्वारा

परिभाषित है तो  $gof$  और  $fog$  ज्ञात कीजिए। तथा सिद्ध कीजिए  $gof \neq fog$

#### 4 अंकीय प्रश्न:

- प्र.23. जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  में  $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$  द्वारा परिभाषित संबंध  $R$  एक तुल्यता संबंध है।
- प्र.24. सिद्ध कीजिए कि पूर्णांको के समुच्चय  $R = (a, b)$  ‘संख्या  $2, (a - b)$  को विभाजित करती है’ द्वारा प्रदत्त संबंध एक तुल्यता संबंध है।
- प्र.25. यदि  $f: N \rightarrow Y, f(x) = 4x + 3$  द्वारा परिभाषित एक फलन है,  
जहाँ  $Y = \{y \in N : y = 4x + 3 \text{ किसी } x \in N \text{ के लिए}\}$ । सिद्ध कीजिए कि  $f$  व्युत्क्रमणीय है।  
 $f$  का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए।
- प्र.26.  $f(x) = \sin x$  द्वारा प्रदत्त फलन  $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow R$  तथा  $f(x) = \cos x$  द्वारा प्रदत्त फलन  $g: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow R$  पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि  $f$  तथा  $g$  एकेकी है, परन्तु  $f + g$  एकेकी नहीं है।
- प्र.27. सिद्ध कीजिए कि  $f: R \rightarrow \{x \in R : -1 < x < 1\}$  जहाँ  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}, x \in R$  द्वारा परिभाषित फलन एकेकी तथा आच्छादक है।
- प्र.28. यदि  $L$  किसी  $XY$  समतल में स्थित समस्त रेखाओं का एक समुच्चय है। तथा  $R = \{(L_1, L_2) : L_1, \text{समान्तर है } L_2 \text{ के}\}$  समुच्चय  $L$  पर परिभाषित एक सम्बन्ध है। सिद्ध कीजिए कि  $R$  एक तुल्यता सम्बन्ध है।
- प्र.29. यदि  $T$  किसी समतल में स्थित समस्त त्रिभुजों का एक समुच्चय है। समुच्चय  $T$  में  $R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2 \text{ के सर्वांगसम हैं}\}$  एक सम्बन्ध है। सिद्ध कीजिए कि  $R$  एक तुल्यता सम्बन्ध है।
- प्र.30. यदि  $A$  किसी समतल में स्थित समस्त त्रिभुजों का एक समुच्चय है। समुच्चय  $A$  में  $R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2 \text{ के समरूप हैं}\}$  एक सम्बन्ध है। सिद्ध कीजिए कि  $R$  एक तुल्यता सम्बन्ध है।

**अध्याय-2**  
**प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन**

**प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए -**

- (i)  $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$  बराबर है :  
 (a)  $\sin^{-1}x$    (b)  $2\cos^{-1}x$    (c)  $\sin^{-1}2x$    (d)  $\tan^{-1}2x$
- (ii)  $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2) =$   
 (a)  $\pi$    (b)  $-\frac{\pi}{3}$    (c)  $\frac{\pi}{3}$    (d)  $\frac{2\pi}{3}$
- (iii)  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) =$   
 (a)  $\frac{1}{2}$    (b)  $\frac{1}{3}$    (c)  $\frac{1}{4}$    (d) 1
- (iv)  $\sin(\tan^{-1}x), |x| < 1 =$   
 (a)  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$    (b)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$    (c)  $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$    (d)  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- (v)  $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ , तब  $x =$   
 (a)  $0, \frac{1}{2}$    (b)  $1, \frac{1}{2}$    (c) 0   (d)  $\frac{1}{2}$
- (vi)  $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - \tan^{-1}\frac{x-y}{x+y} =$   
 (a)  $\frac{\pi}{2}$    (b)  $\frac{\pi}{3}$    (c)  $\frac{\pi}{4}$    (d)  $-\frac{3\pi}{4}$
- (vii)  $\cot^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$  का मुख्य मान होता है :  
 (a)  $\frac{2\pi}{3}$    (b)  $\frac{\pi}{3}$    (c)  $\frac{5\pi}{3}$    (d)  $\frac{\pi}{4}$
- (viii)  $\tan^{-1}(-1)$  का मुख्य मान है :  
 (a)  $\frac{\pi}{4}$    (b)  $-\frac{\pi}{4}$    (c)  $\frac{\pi}{2}$    (d)  $-\frac{\pi}{2}$
- (ix)  $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$  बराबर है :  
 (a)  $\sin^{-1}x$    (b)  $\cos^{-1}x$    (c)  $\sec^{-1}x$    (d)  $\cot^{-1}x$
- (x)  $\sin^{-1}(-x)$  बराबर है :  
 (a)  $\sin^{-1}x$    (b)  $-\sin^{-1}x$    (c)  $\cos^{-1}x$    (d)  $-\cos^{-1}x$
- (xi)  $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y$  बराबर है :  
 (a)  $\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$    (b)  $\tan^{-1}\frac{x+y}{1+xy}$    (c)  $\tan^{-1}\frac{x-y}{1-xy}$    (d)  $\tan^{-1}\frac{1-xy}{x+y}$
- (xii)  $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x$  बराबर है :  
 (a)  $\frac{\pi}{4}$    (b)  $\frac{\pi}{2}$    (c)  $\frac{\pi}{3}$    (d)  $\frac{\pi}{6}$
- (xiii)  $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$  का मान होता है :  
 (a)  $\frac{\pi}{6}$    (b)  $\frac{\pi}{3}$    (c)  $\frac{2\pi}{3}$    (d)  $\frac{\pi}{2}$
- (xiv)  $\tan^{-1}x$  की मुख्य शाखा का परिसर होता है :  
 (a)  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$    (b)  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$    (c)  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$    (d)  $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$
- (xv)  $\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$  का मान होता है :  
 (a)  $\frac{7\pi}{6}$    (b)  $(\frac{5\pi}{6})$    (c)  $\frac{\pi}{3}$    (d)  $\frac{\pi}{6}$
- (xvi)  $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$  का मान होता है :  
 (a)  $\frac{\pi}{4}$    (b)  $-\frac{\pi}{4}$    (c)  $\frac{\pi}{2}$    (d)  $\frac{\pi}{3}$
- (xvii)  $\cos^{-1}x$  का प्रांत है :  
 (a)  $(-1, 1)$    (b)  $[-1, 1]$    (c)  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$    (d)  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

## प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

- $\cos^{-1}x$  का प्रांत ..... है।
- $\tan^{-1}x$  की मुख्य मान शाखा ..... है।
- $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$  हो तो  $\cos x$  का मान ..... है।
- $\cot^{-1}x$  की मुख्य शाखा का परिसर ..... है।
- $2\tan^{-1}x$  बराबर ..... है।
- किसी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का मुख्य मान वह मान होता जो उसकी ..... में स्थित होता है।

## प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए:

- $\cos^{-1}x$  का प्रांत  $R = (-1, 1)$  है।
- $\sec^{-1}x$  की मुख्य मान शाखा  $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$  है।
- किसी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का मुख्य मान वह मान होता जो उसकी मुख्य शाखा में स्थित नहीं होता है।
- $\sin^{-1}x$  का प्रांत  $[-1, 1]$  है।
- यदि  $\sin^{-1}x = y$  तब  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  है।
- $\sin^{-1}x$  और  $(\sin x)^{-1}$  दोनों समान हैं।

## प्रश्न 3. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए :

- $\cot^{-1}x$  का प्रांत लिखिए।
- $\operatorname{cosec}^{-1}x$  की मुख्य मान शाखा लिखिए।
- $\cos(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x)$ ,  $|x| \geq 1$  का मान लिखिए।
- $\cot(\tan^{-1}a + \cot^{-1}a)$  का मान लिखिए।
- $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  का मुख्य मान क्या होता है ?
- $\sin^{-1}(\sin \frac{3\pi}{5})$  का मान क्या होता है :

## 2 अंकीय प्रश्न:

प्रश्न 1.  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$  का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 2.  $\tan^{-1}(1)$  का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 3.  $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$  का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 4.  $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$  का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 5.  $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 6.  $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7. दर्शाइए कि  $-\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x \in (-1, 1)$

प्रश्न 8.  $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$  को सरलतम रूप में लिखिए।

प्रश्न 9. मान ज्ञात कीजिए :  $\tan^{-1}(\tan \frac{7\pi}{6})$

प्रश्न 10.  $\tan^{-1}[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)]$  का मान ज्ञात कीजिए।

### 3 अंकीय प्रश्न:

प्रश्न 11. दर्शाइए कि  $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\sin^{-1}x$ ,  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

प्रश्न 12. दर्शाइए कि  $\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = 2\tan^{-1}x$ ,  $|x| \leq 1$

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए कि  $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$ ,  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए कि  $2\sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{24}{7}$

प्रश्न 15. सिद्ध कीजिए कि  $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{33}{65}$

प्रश्न 16.  $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ ,  $x \neq 0$  का सरलतम रूप में लिखिए।

प्रश्न 17. सिद्ध कीजिए कि  $\tan^{-1}\frac{2}{11} + \tan^{-1}\frac{7}{24} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

प्रश्न 18.  $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$  का सरलतम रूप में लिखिए।

प्रश्न 19. दर्शाइए कि  $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\cos^{-1}x$ ,  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$

प्रश्न 20. सिद्ध कीजिए कि  $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$ ,  $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

प्रश्न 21. सिद्ध कीजिए कि  $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$ ,  $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

प्रश्न 22. सिद्ध कीजिए कि  $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$ ,  $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

प्रश्न 23. सिद्ध कीजिए कि  $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left[\frac{1-x}{1+x}\right]$ ,  $x \in [0, 1]$

प्रश्न 24. सिद्ध कीजिए कि  $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x$ ,  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$ .

प्रश्न 24.  $\cot^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right]$ ,  $|x| > 1$  को सरलतम रूप में लिखिए।

प्रश्न 25.  $\tan^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right]$ ,  $|x| > 1$  को सरलतम रूप में लिखिए।

प्रश्न 26.  $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$ ,  $x \neq 0$  को सरलतम रूप में लिखिए।

प्रश्न 27.  $\tan^{-1}\left[\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]$ ,  $|x| < 1$  को सरलतम रूप में लिखिए।

प्रश्न 28.  $\tan^{-1}\left[\frac{\cos x}{1-\sin x}\right]$ ,  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$  को सरलतम रूप में लिखिए।

प्रश्न 29.  $\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right]$ ,  $x < \pi$  को सरलतम रूप में लिखिए।

प्रश्न 30.  $\tan^{-1}\left[\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right]$ ,  $0 < x < \pi$  को सरलतम रूप में लिखिए।

प्रश्न 31. सिद्ध कीजिए  $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{2}{11} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

प्रश्न 32.  $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$  को सरल कीजिए।

प्रश्न 33. दर्शाइए कि  $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$

प्रश्न 34. सिद्ध कीजिए  $\sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{77}{36}$

प्रश्न 35. सिद्ध कीजिए  $2\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{31}{17}$

प्रश्न 36. दर्शाइए कि  $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{2}{11} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

प्रश्न 37. सिद्ध कीजिए -  $\tan^{-1}\frac{2}{11} + \tan^{-1}\frac{7}{24} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

प्रश्न 39. सिद्ध कीजिए -  $2\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{31}{17}$

प्रश्न 40.  $\tan[2\cos(2\sin^{-1}\frac{1}{2})]$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 41. यदि  $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x) = 1$  तो  $x$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 42. हल कीजिए  $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$

प्रश्न 43.  $\sin^{-1}[\sin\frac{2\pi}{3}]$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 44.  $\sin^{-1}[\sin\frac{3\pi}{5}]$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 45.  $\tan^{-1}[\tan\frac{3\pi}{4}]$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 46.  $\tan^{-1}[\tan\frac{7\pi}{6}]$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 47.  $\cos^{-1}[\cos\frac{13\pi}{6}]$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 48.  $\tan[\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cot^{-1}\frac{3}{2}]$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 49. दर्शाइए कि  $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$

प्रश्न 50. दर्शाइए कि  $\sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{77}{36}$

प्रश्न 51. दर्शाइए कि  $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{33}{35}$

#### 4 अंकीय प्रश्न:

प्रश्न 52. फलन  $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x-x^3}{a^3-3ax^2}\right)$ ,  $a > 0$ ,  $\frac{-a}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{3}}$  को सरलतम रूप में लिखिए।

प्रश्न 53. सरल कीजिए  $\tan^{-1}\left[\frac{acosx-bsinx}{bcosx+asinx}\right]$ , if  $\frac{a}{b}\tan x > -1$

प्रश्न 54. सिद्ध कीजिए  $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}\right] = \frac{x}{2}$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

प्रश्न 55.  $\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right]$ ,  $|x| < 1, y > 0$  और  $xy < 1$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 56. यदि  $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$  तो  $x$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 57.  $\tan^{-1}\frac{x}{y} + \tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 58.  $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}\right] = \frac{x}{2}$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  को हल कीजिए।

प्रश्न 59.  $\cos^{-1}\frac{12}{13} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \sin^{-1}\frac{55}{65}$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 60. हल कीजिए  $\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$ .

### अध्याय-3

#### आव्यूह

##### प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए-

- (i)  $3 \times 3$  कोटि के ऐसे आव्यूहों की कुल संख्या होगी जिनकी प्रत्येक की प्रविष्टि 0 या 1 है।  
 (a) 27 (b) 18 (c) 81 (d) 512
- (ii)  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  एक वर्ग आव्यूह है यदि  
 (a)  $m < n$  (b)  $m > n$  (c)  $m = n$  (d) इनमें से कोई नहीं
- (iii) आव्यूह  $A$  तथा  $B$  एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे यदि  
 (a)  $AB = BA$  (b)  $AB - BA = 0$  (c)  $AB = 0, BA = 1$  (d)  $AB = BA = I$
- (iv) यदि एक आव्यूह  $A$  सममित एवं विषम सममित दोनों ही है तो  $A$  :  
 (a) एक विकर्ण आव्यूह है (b) एक शून्य आव्यूह है  
 (c) एक वर्ग आव्यूह है (d) इनमें से कोई नहीं
- (v) यदि  $A$  तथा  $B$  समान कोटि के सममित आव्यूह हैं तो  $AB - BA$   
 (a) विषम सममित आव्यूह है। (b) सममित आव्यूह है।  
 (c) शून्य आव्यूह है। (d) तत्समक आव्यूह है।
- (vi)  $A = [a_{ij}]_{m \times 1}$  एक आव्यूह है।  
 (a) पंक्ति आव्यूह (b) स्तंभ आव्यूह (c) वर्ग आव्यूह (d) विकर्ण आव्यूह
- (vii)  $2 \times 3$  कोटि के आव्यूह में अवयवों की संख्या है।  
 (a) 5 (b) 1 (c) 6 (d) 8
- (viii) यदि  $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  तो  $x$  और  $y$  के मान हैं:  
 (a)  $x = 2, y = 3$  (b)  $x = 3, y = 2$   
 (c)  $x = 1, y = 4$  (d)  $x = 4, y = 1$
- (ix) आव्यूह  $A_{m \times n}$  व  $B_{l \times p}$  का गुणनफल  $AB$  परिभाषित होगा यदि  
 (a)  $m = n$  (b)  $n = l$  (c)  $l = p$  (d)  $m = p$
- (x) एक  $2 \times 2$  आव्यूह।  $A = [a_{ij}]$  जहाँ  $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$  की पहली पंक्ति और दूसरे स्तंभ का अवयव है।  
 (a)  $\frac{3}{2}$  (b)  $\frac{9}{2}$  (c)  $\frac{2}{9}$  (d)  $\frac{2}{3}$
- (xi) यदि आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  है तो  $A^2$  का मान होगा -  
 (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$   
 (c)  $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
- (xii)  $(AB)'$  का मान निम्न के बराबर है।  
 (a)  $A'B'$  (b)  $B'A'$  (c)  $A'B$  (d)  $AB'$
- (xiii) यदि  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$   $B = [1 \ 3 \ -6]$  तो  $AB$  में अवयवों की संख्या होगी-  
 (a) 1 (b) 6 (c) 6 (d) 9
- (xiv) निम्न आव्यूह सममित आव्यूह है -  
 (a)  $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$  (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

## प्रश्न 2. सत्य/असत्य लिखिए:

- (i)  $A = [a_{ij}]_{1 \times n}$  एक पॉक्टिआव्यूह होता है।
- (ii) आव्यूहों में योग की संक्रिया के लिए साहचर्य नियम का पालन नहीं होता है।
- (iii) किसी  $A$  आव्यूह के लिए  $A = [a_{ij}]_{1 \times n}$  एक स्तंभ आव्यूह होता है।
- (iv) आव्यूहों में गुणन की संक्रिया के क्रम विनिमेय नियम का पालन होता है।
- (v) तीन आव्यूहों  $A, B$  व  $C$  के लिए  $(AB)C = A(BC)$
- (vi) प्रत्येक वर्ग आव्यूह एक विकर्ण आव्यूह होता है।
- (vii) प्रत्येक वर्ग आव्यूह एक अदिश आव्यूह होता है।
- (viii) प्रत्येक विकर्ण आव्यूह एक अदिश आव्यूह होता है।
- (ix) प्रत्येक अदिश आव्यूह एक विकर्ण आव्यूह होता है।
- (x) प्रत्येक अदिश आव्यूह एक तत्समक आव्यूह होता है।
- (xi) प्रत्येक तत्समक आव्यूह एक अदिश आव्यूह होता है।
- (xii) प्रत्येक तत्समक आव्यूह एक विकर्ण आव्यूह होता है।
- (xiii) प्रत्येक तत्समक आव्यूह एक वर्ग आव्यूह होता है।
- (xiv) किसी आव्यूह के परिवर्त आव्यूह का पुनः परिवर्त आव्यूह मूल आव्यूह के बराबर होता है।
- (xv) यदि आव्यूह  $A$  इस प्रकार है कि  $A' = A$  तो आव्यूह  $A$  को विषम सममित आव्यूह कहते हैं।
- (xvi) यदि वर्ग आव्यूह  $A$  इस प्रकार है कि  $A' = -A$  तो  $A$  को विषम सममित आव्यूह कहते हैं।
- (xvii) यदि दो वर्ग आव्यूह इस प्रकार है कि  $AB = I$  जहाँ  $I$  तत्समक आव्यूह है तो आव्यूह  $A$  और  $B$  को एक दूसरे का परिवर्त आव्यूह कहते हैं।
- (xviii) दो आव्यूहों का योग जात करने के लिये यह आवश्यक नहीं है कि उनकी कोटियाँ समान हों।
- (xix) यदि आव्यूह  $A$  की कोटि  $2 \times 3$  व आव्यूह  $B$  की कोटि  $3 \times 4$  हो तो इनके गुणनफल से प्राप्त आव्यूह  $AB$  की कोटि  $2 \times 4$  होगी।

## प्रश्न 3. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए :

- i. यदि  $A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$  तथा  $A + A' = I$  है तो  $x$  का मान क्या है ?
- ii. यदि  $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  है तो  $a$  का मान क्या है ?
- iii.  $2 \times 2$  कोटि का तत्समक आव्यूह लिखिए।
- iv. विकर्ण आव्यूह का कोई एक उदाहरण लिखिए।
- v. तत्समक आव्यूह को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।
- vi. विकर्ण आव्यूह क्या है?
- vii. यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$  तो  $(2A + B)$  का मान जात कीजिए।
- viii. आव्यूहों के योग का क्रम विनिमेय नियम लिखिए।
- ix. वर्ग आव्यूह  $A$  को एक सममित आव्यूह और एक विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त कीजिए।
- x. यदि  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  तो  $A^2$  जात कीजिए।
- xi. पॉक्टिआव्यूह को परिभाषित कीजिए।

#### प्रश्न 4. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

- पंक्ति आव्यूह में पंक्तियों की संख्या ..... होती है।
- वर्ग आव्यूह में पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या ..... होती है।
- ऐसा वर्ग आव्यूह जिसके विकर्ण की प्रत्येक प्रविष्ठि 1 हो तथा शेष प्रविष्ठि शून्य हो ..... आव्यूह कहलाता है।
- यदि  $A$  एक वर्ग आव्यूह है तथा  $I$  एक तत्समक आव्यूह है तो  $AI = \dots$ ।
- यदि  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  तो  $A^2 = \dots$ ।
- यदि  $a_{ij} = \frac{i+2j}{3}$  तो  $a_{21} = \dots$ ।
- यदि  $AB = C$  जबकि  $A, B, C$  क्रमशः तो  $m \times 2, 2 \times 3, 4 \times 3$  कोटि के आव्यूह हैं, तो  $m = \dots$ ।
- यदि  $A$  का परिवर्त आव्यूह  $A'$  है तो  $(A')' = \dots$ ।
- वर्ग आव्यूह  $A$  का परिवर्त आव्यूह  $A'$  है तो  $A + A'$  एक ..... आव्यूह होता है।
- वर्ग आव्यूह  $A$  का परिवर्त आव्यूह  $A'$  है तो  $A - A'$  एक ..... आव्यूह होता है।
- ऐसा विकर्ण आव्यूह जिसके विकर्ण के सभी अवयव समान होते हैं ..... आव्यूह कहलाता है।
- ऐसा विकर्ण आव्यूह जिसके विकर्ण के सभी अवयव इकाई होते हैं ..... आव्यूह कहलाता है।
- $\begin{bmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  तो  $x + y = \dots$ ।
- यदि  $A + B = O, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$   $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  तो  $B = \dots$ ।
- यदि  $A$  और  $B$  एक दूसरे के व्युत्क्रम आव्यूह हैं तो  $AB = \dots$ ।

#### प्रश्न 5. सही जोड़ी मिलाइए।

Column A	Column B
(i) $A' = A$	(a) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$
(ii) $A' = -A$	(b) आव्यूह के योग का क्रम विनिमेय नियम।
(iii) $(A + B)'$	(c) $A$ एक सममित आव्यूह है।
(iv) $(AB)'$	(d) $A' + B'$
(v) $AB = I$	(e) $A$ एक विषम सममित आव्यूह है।
(vi) $A_{m \times n}$	(f) $A$ और $B$ एक दूसरे के व्युत्क्रम हैं।
(vii) $(3 \times 3)$ कोटि का तत्समक आव्यूह	(g) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
(viii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	(h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(ix) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	(i) $m \times n$ कोटि का आव्यूह
(x) $A + B = B + A$	(j) $B'A'$

#### 2 अंकीय प्रश्न

प्रश्न-6  $2 \times 2$  कोटि के आव्यूह की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्न प्रकार से प्राप्त होते हैं

$$a_{ij} = \frac{1}{2} |-3i + j|$$

प्रश्न-7 सरल कीजिए  $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

प्रश्न-8. सरल कीजिए  $\cos\theta \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$

प्रश्न-9.  $X$  का मान ज्ञात कीजिए, यदि  $Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  और  $2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

प्रश्न-10. यदि  $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  तथा  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  तब  $(A + 2B)'$  का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न-11 यदि  $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  तथा  $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$  है तो  $AB$  ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न-12 यदि  $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} & 1 \\ -2 & 3 & 1/2 \end{bmatrix}$  है तो  $A + B$  ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न-13 यदि  $\begin{bmatrix} 2x + 7 & 5 \\ y + 1 & 2 - 3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & y - 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$  तो  $x$  व  $y$  के मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न-14  $3 \times 4$  आव्यूह  $A = [a_{ij}]$  की रचना कीजिए यदि  $a_{ij} = 2i - j$

प्रश्न-15 यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  तथा  $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  है तो  $2A + B$  ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न-16 आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  व  $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  के लिये आव्यूहों के योग के क्रम विनिमेय नियम का सत्यापन कीजिए ।

प्रश्न-17  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  व  $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  तो  $3A - B$  ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न-18 आव्यूह  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  और  $[2 \ 3 \ 4]$  का गुणनफल परिकलित कीजिए ।

प्रश्न-19 यदि  $x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$  है तो  $x$  व  $y$  के मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न-20 एक  $2 \times 2$  आव्यूह  $A = [a_{ij}]$  की रचना कीजिए जबकि  $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$

प्रश्न-21 यदि  $\begin{bmatrix} x + y + z \\ x + z \\ y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$  तो  $x, y$  तथा  $z$  के मान ज्ञात कीजिए।

### 3 अंकीय प्रश्न:

प्रश्न-20 यदि  $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$  है तो निम्न को सत्यापित कीजिए ।

$$(A + B)' = A' + B'$$

प्रश्न-21 सत्यापित कीजिए कि  $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 & 3 \\ 2 & -1.5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  एक सममित आव्यूह है।

प्रश्न-22 यदि  $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  तथा  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  है तो  $(A + 2B)'$  ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न-23 यदि  $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$  तथा है तो सत्यापित कीजिए  $A'A = I$

प्रश्न-24 यदि  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  तथा  $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  तो सिद्ध कीजिए कि दोनो आव्यूह एक दूसरे के व्युत्क्रम हैं।

प्रश्न-25 यदि  $A + I = O$  जहाँ  $I$  व  $O$  क्रमशः  $2 \times 2$  के तत्समक आव्यूह एवं शून्य आव्यूह हैं, तो  $2 \times 2$  कोटि के आव्यूह  $A$  का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न-26. यदि  $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  और  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$  तो सत्यापित कीजिए  $(A + B)' = A' + B'$

प्रश्न-27. दिखाइए कि  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  एक सममित आव्यूह है।

प्रश्न-28. यदि  $A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$  तो सिद्ध कीजिए कि  $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$

प्रश्न-29. वर्ग आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$  सममित एवं एक विषम सममित आव्यूहों के

योग के रूप में व्यक्त कीजिए।

प्रश्न-30. यदि आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ x & 2 & y \end{bmatrix}$  समीकरण  $AA' = 9I$  को संतुष्ट करता है

तो  $x$  व  $y$  के मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-31. यदि आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$  और  $A^2 = PA$  तो  $P$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-32.  $x$  तथा  $y$  ज्ञात कीजिए यदि  $x + y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$  तथा  $x - y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

प्रश्न-33. आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$  के लिये सत्यापित कीजिए कि  $(A + A')$  एक सममित तथा  $(A - A')$  एक विषम सममित आव्यूह है।

प्रश्न-34. यदि  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  तथा  $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  है तो सत्यापित कीजिए कि  $(A - B)' = A' - B'$

प्रश्न-35. यदि  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$  तथा  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  एवं  $A^2 = kA - 2I$  तो  $k$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-36. दिये गये समीकरण को  $x, y, z$  तथा  $t$  के लिये हल कीजिए यदि

$$2 \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

प्रश्न-37.  $X$  तथा  $Y$  के मान ज्ञात कीजिये यदि  $Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  तथा  $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

प्रश्न-38.  $X$  तथा  $Y$  के मान ज्ञात कीजिये यदि  $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$  तथा

$$3X + 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

प्रश्न-39. यदि  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  तथा  $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  हो तो ज्ञात  $AB$  कीजिए।

प्रश्न-40. यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$  हो तो आव्यूहों के लिये योग के साहचर्य नियम का सत्यापन कीजिए।

#### 4 अंकीय प्रश्न:

प्रश्न-41. यदि  $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$  दिया हो तथा  $4A + 7B + 4X = 3I$  तो आव्यूह  $X$  ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-42. यदि  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  है तो  $A^2 - 5A + 6I$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-43. आव्यूह  $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$  को एक सममित एवं एक विषम सममित आव्यूहों के

योग के रूप में व्यक्त कीजिए।

प्रश्न-44. यदि  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$  हो तो एक ऐसा आव्यूह D

जात कीजिए कि  $CD - AB = 0$  जहाँ 0 एक शून्य आव्यूह है।

प्रश्न-45. आव्यूह  $A, B, C$  के लिये गुणन के साहचर्य नियम का सत्यापन कीजिए

यदि  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  हो।

प्रश्न-46. आव्यूह  $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  को एक सममित एवं एक विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त कीजिए।

प्रश्न:-47. सिद्ध कीजिए कि वास्तविक अवयवों वाले किसी वर्ग आव्यूह  $A$  के लिये  $A + A'$  एक सममित एवं  $A - A'$  एक विषम सममित आव्यूह होते हैं।

प्रश्न-48. यदि  $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  तथा कि  $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$  हो तो

सत्यापित कीजिए कि  $(A + B)C = AC + BC$

प्रश्न-49. यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$  और  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  है दर्शाइए कि  $AB \neq BA$

प्रश्न-50. यदि  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  तथा  $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  है तो सत्यापित कीजिए कि

$$(A - B)' = A' - B'$$

## अध्याय-4

### सारणिक

**प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए –**

- (i) यदि  $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$  तब  $x$  का मान होगा  
 (a) 6 (b)  $\pm 6$  (c)  $-6$  (d) 0
- (ii) यदि  $A, 3 \times 3$  कोटि का वर्ग आव्यूह होगा तो  $|kA|$   
 (a)  $k|A|$  (b)  $k^2|A|$  (c)  $k^3|A|$  (d)  $3k$
- (iii) निम्नलिखित में से कौन सा सत्य है  
 (a) सारणिक एक वर्ग आव्यूह है। (b) सारणिक आव्यूह से संबंध एक संख्या है।  
 (c) सारणिक एक वर्ग आव्यूह से सम्बद्ध एक संख्या है। (d) इनमें से कोई नहीं।
- (iv) यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई है तथा इसके शीर्ष  $(2, -6)$   $(5, 4)$  तथा  $(k, 4)$  हैं तो  $k$  का मान है :  
 (a) 12 (b)  $-2$  (c)  $-12, -2$  (d)  $12, -2$
- (v) यदि  $A, 3 \times 3$  कोटि का वर्ग आव्यूह है तो  $|adj A|$  का मान है :  
 (a)  $|A|$  (b)  $|A|^2$  (c)  $|A|^3$  (d)  $3|A|$
- (vi) यदि  $A$ , कोटि दो का वर्ग आव्यूह है तो  $\det(A^{-1})$  बराबर है :  
 (a)  $\det(A)$  (b)  $\frac{1}{\det(A)}$  (c) 1 (d) 0
- (vii) यदि  $A$  और  $B$  दो व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं तो  $(AB)^{-1}$  का मान बराबर है :  
 (a)  $A^{-1}B^{-1}$  (b)  $B^{-1}A^{-1}$  (c)  $AB$  (d)  $A^{-1}B$
- (viii) यदि  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  और  $a_{ij}$  का सहखंड  $a_{ij}$  है तो  $\Delta$  का मान निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है।  
 (a)  $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$  (b)  $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}$   
 (c)  $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$  (d)  $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$
- (ix)  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  का मान है:-  
 (a)  $a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32}$  (b)  $a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}$  (c)  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$  (d) 0
- (x) सारणिक  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$  का मान है-  
 (a) 2 (b) 10 (c) 0 (d) -8
- (xi) सारणिक  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$  के अवयव 1 का उपसारणिक है:-  
 (a) 4 (b) -2 (c) 1 (d) 3
- (xii) सारणिक  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$  के अवयव 4 का सहखण्ड है:-  
 (a) 2 (b) -2 (c) 1 (d) 3

(xiii) एक वर्ग आव्यूह  $A$  व्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि:-

- (a)  $|A| = 0$  (b)  $|A| \neq 0$  (c)  $|A| = 1$  (d)  $|A|=2$

(xiv) एक वर्ग आव्यूह  $A$  अव्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि:-

- (a)  $|A| = 0$  (b)  $|A| \neq 0$  (c)  $|A| = 1$  (d)  $|A|=2$

**प्रश्न2.** एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए :

- i.  $\begin{vmatrix} \cos 15 & \sin 15 \\ \sin 75 & \cos 75 \end{vmatrix}$  का मान क्या है ?
- ii.  $x$  के किस मान के लिए आव्यूह  $\begin{vmatrix} 6-x & 4 \\ 3-x & 1 \end{vmatrix}$  एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह होगा ।
- iii. यदि  $A$  कोई  $3 \times 3$  कोटि का वर्ग आव्यूह हो तब सारणिक के उपसारणिकों की संख्या लिखिए ।
- iv. यदि बिंदु  $(k+1, 1)$   $(2k+1, 3)$  और  $(2k+2, 2k)$  संरेख हैं तो  $k$  का मान क्या है ?
- v.  $\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$  का मान ज्ञात करें।
- vi.  $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ ,  $x$  का मान ज्ञात करें।
- vii. यदि किसी सारणिक की कोई पंक्ति या स्तंभ के सभी अवयव शून्य हों तो सारणिक का मान क्या होता है ?
- viii. यदि  $A$ ,  $3 \times 3$  कोटि का वर्ग आव्यूह हो तो  $A^{-1}$  और  $(adjA)$  में संबंध होता है।
- ix. यदि  $|A| = 10$  तो  $|3A|$  का मान क्या होगा ? यदि  $A$ ,  $3 \times 3$  का वर्ग आव्यूह है।
- x. यदि  $A$ ,  $3 \times 3$  कोटि का वर्ग आव्यूह हो, तथा  $|A| = 20$ , तो  $|adjA|$  का मान क्या होगा ?
- xi.  $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$  का मान ज्ञात करें।
- xii.  $\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix}$  का मान क्या होगा ?
- xiii. क्या  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है ?

**प्रश्न3.** रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

- i. सारणिक  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$  में अवयव 6 का उपसारणिक ..... है ।
- ii. बिंदु  $A(a, b+c)$ ,  $B(b, c+a)$  और  $C(a, a+b)$  ..... हैं।
- iii. यदि  $A$  कोई वर्ग आव्यूह है तथा  $|A| \neq 0$  तो  $A$  एक ..... आव्यूह है।
- iv. एक वर्ग आव्यूह  $A$  अव्युत्क्रमणीय आव्यूह कहलाता है यदि .....
- v. यदि किसी त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  हों तो त्रिभुज का क्षेत्रफल सारणिक रूप में..... होता है.
- vi. यदि  $A, n$  कोटि का अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो  $det(A) = \dots$
- vii. यदि  $3 \times 3$  कोटि के वर्ग आव्यूह  $A$  के लिये  $|A|=3$  हो तो  $det(A) = \dots$
- viii. दो व्युत्क्रमणीय आव्यूह  $A$  और  $B$  के लिये  $(AB)^{-1} = \dots$
- ix. सारणिक  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$  का मान ..... होगा।
- x. यदि  $A$  कोटि 2 का व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो  $det(A^{-1}) = \dots$  होगा।
- xi. यदि  $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 8 & x \end{vmatrix}$  तो  $x$  का मान ..... होगा।

- xii.  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$  का मान .....होगा।
- xiii.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$  का मान .....होगा।

**प्रश्न 4. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य/असत्य लिखिए**

- यदि  $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$  तब  $\Delta$  का मान शून्य होगा।
- केवल वर्ग आव्यूह सारणिक कहलाते हैं।
- यदि  $A$  एक वर्ग आव्यूह है तब  $\det(A) = \det(A')$ , जहाँ  $A' = A$  का परिवर्त।
- प्रत्येक कोटि के आव्यूह से संबंधित एक सारणिक प्राप्त किया जा सकता है।
- यदि  $|A| = 0$  तो  $A$  एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।
- $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$  का मान  $-2$  है।
- $A$  यदि  $3 \times 3$  कोटि के सारणिक के प्रत्येक अवयव में  $k$  से गुणा कर दिया जाय तो सारणिक का मान  $k$  भी गुणा हो जाता है।
- किसी सारणिक का मान इसकी पैकितियों और स्तंभों को परस्पर बदल देने पर अपरिवर्तित रहता है।

**प्रश्न- 05 सही जोड़ी मिलाइए ।**

Column A	Column B
(i) $(AB)^{-1}$	(a) $x = 4$
(ii) $ AB $	(b) $ A I$
(iii) $A.(adjA)$	(c) $ A =0$
(iv) $A^{-1}$	(d) $ A  \neq 0$
(v) व्युत्क्रमणीय आव्यूह	(e) $B^{-1} A^{-1}$
(vi) अव्युत्क्रमणीय आव्यूह	(f) $\frac{adjA}{ A }$
(vii) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$	(g) $ A  B $
(viii) $Det(A^{-1})$	(h) $\frac{1}{\det(A)}$
(ix) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$	(j) $0$
(x) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$	(g) $x = \pm 3$

**2 अंकीय प्रश्न:**

प्रश्न-06  $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-07 यदि  $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ , तो  $x$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-08 यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  तो दिखाइए कि  $|2A| = 4|A|$ .

प्रश्न-09 यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ , हो तो  $|A|$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-10 एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष  $(3,8), (-4,2)$  और  $(5,1)$  हैं।

प्रश्न-11 दर्शाइए कि  $A(a, b + c), B(b, c + a)$  और  $C(c, a + b)$  संरेख हैं।

प्रश्न-12 सारणिक  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \end{vmatrix}$  में 4 का उपसारणिक ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-13 सारणिक  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix}$  में अवयव 5 का सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-14 यदि  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  तो  $adjA$  ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-15  $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-16 दूसरी पैंक्ति के अवयवों के सहखण्डों का प्रयोग करके  $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-17 यदि  $2 \times 2$  आव्यूह  $A$  के लिये  $|A| = 18$  तो  $|adjA|$  ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-18 यदि  $3 \times 3$  आव्यूह  $A$  के लिये  $|A| = 15$  तो  $|3A|$  का मान ज्ञात कीजिए।

### 3 अंकीय प्रश्न:

प्रश्न-21 यदि  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$  तो सत्यापित कीजिए कि  $A(adjA) = (adjA)A = |A|I$

प्रश्न-22 समीकरण निकाय  $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 7x + 3y = 5 \end{cases}$  को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

प्रश्न-23  $k$  का मान ज्ञान कीजिए जबकि त्रिभुज का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है जहाँ त्रिभुज के शीर्ष  $(k, 0), (4, 0), (0, 2)$

प्रश्न-24 सारणिकों का प्रयोग करके  $(1,2)$  व  $(4,0)$  को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-25  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  के प्रत्येक अवयव के सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-26 सारणिक  $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-27 यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  तो सिद्ध कीजिए  $|3A| = 27|A|$

प्रश्न-28 तीसरे स्तंभों के सहखण्डों का प्रयोग करके  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$  का मान ज्ञात कीजिए

प्रश्न-29  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$  के लिए सत्यापित कीजिए कि :  $A.(adjA) = (adjA).A = |A|.I$

प्रश्न-30  $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  के लिए व्युत्क्रम (यदि व्युत्क्रम का अस्तित्व) ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-31 आव्यूह  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  का सहखण्डज आव्यूह ज्ञात कीजिए

प्रश्न-32  $n$ , कोटि के वर्ग आव्यूह  $A$  के लिये सिद्ध कीजिए कि  $|adj A^n| = |A|^{n-1}$

#### 4 अंकीय प्रश्न:

प्रश्न-33 यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  हो तो सत्यापित कीजिए कि  $A.(adj A) = |A|I$  और  $A^{-1}$  भी ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-34 यदि  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  हो तो सत्यापित कीजिए कि  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

प्रश्न-35 समीकरण निकाय,  $3x - 2y + 3z = 8$

$$2x + y - z = 14$$

$$4x - 3y + 2z = 4 \quad \text{को आव्यूह विधि से हल कीजिए।}$$

प्रश्न-36. सारणिकों के प्रयोग से बिन्दुओं (1,2) और (3,6) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-37 यदि  $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  और  $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$  तो सिद्ध कीजिए  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

प्रश्न-38 आव्यूह  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-39 आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  है तो सिद्ध कीजिए कि  $A^2 - 4A - 5I = 0$  तथा  $A^{-1}$  भी ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-40  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  के लिए सत्यापित कीजिए कि :  $A.(adj A) = (adj A).A = |A|.I$

प्रश्न-41. आव्यूह  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$  के लिए व्युत्क्रम (यदि व्युत्क्रम का अस्तित्व) ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-42 यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  हो तो सत्यापित कीजिए कि  $A.(adj A) = |A|.I$  और  $A^{-1}$  भी ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-43. सारणिक  $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$  के अवयवों के उपसारणिक तथा सहखंड ज्ञात कीजिए।

## अध्याय-5 सातत्य तथा अवकलनीयता

### प्रश्न1. सही विकल्प चुनिए

- (i)  $5^x$  का  $x$  के सापेक्ष अवकल गुणांक होगा।  
 (a)  $5^x \log_e 5$    (b)  $5^x \log_5 e$    (c)  $5^x$    (d)  $\frac{5^x}{\log_e a}$
- (ii)  $x^6$  का  $x^3$  के सापेक्ष अवकल गुणांक होगा:  
 (a)  $6x^3$    (b)  $3x^2$    (c)  $2x^3$    (d)  $2x^2$
- (iii) यदि  $f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$ , तब  $f'(x)$  का मान होगा:  
 (a) 1   (b) -1   (c) 0   (d) इनमें से कोई नहीं
- (iv) यदि  $y = a \sin mx + b \cos mx$  तब  $\frac{d^2y}{dx^2} =$   
 (a)  $m^2 y$    (b)  $-m^2 y$    (c)  $my$    (d)  $-my$
- (v)  $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$  का  $x$  के सापेक्ष अवकल गुणांक  
 (a)  $\frac{1}{2}$    (b)  $-\frac{1}{2}$    (c) 0   (d) इनमें से कोई नहीं

### प्रश्न2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

- (i)  $\tan(x^2 + 5)$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन-----होगा।
- (ii)  $\frac{dy}{dx}$  का मान----- होगा यदि  $\sin(x + y) = x^2 + y^2$
- (iii)  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  तब  $\frac{dy}{dx}$  का मान-----होगा।
- (iv)  $\sec\left(\frac{5}{x}\right)$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन-----है।
- (v) यदि  $f(x) = 1 - \cos x$  है तो  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$  का मान-----है।
- (vi) यदि  $y = \log_e e^x$  तब  $\frac{dy}{dx} = \dots$
- (vii) यदि  $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$  तब  $\frac{dy}{dx} = \dots$
- (viii) यदि  $y = e^x \cos x$  हो तो  $\frac{dy}{dx}$  का मान होगा  $\dots$
- (ix) यदि  $y = \sin x^n$  हो तो  $x$  के सापेक्ष अवकल का मान  $\dots$  होगा।
- (x)  $\sin x^3$  का अवकल गुणांक,  $\dots$  होता है।

### प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए -

- (i) प्रत्येक बहुपद फलन सतत होता है।
- (ii) फलन  $f(x) = |x|$ ,  $x = 0$  पर सतत व अवकलनीय है।
- (iii) प्रत्येक अवकलनीय फलन सतत होता है।
- (iv)  $a^{2x}$  का अवकल गुणांक  $a^{2x} \log 2$  होता है।
- (v) यदि  $f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$  हो तो  $f'(x)$  का मान 1 होगा।
- (vi)  $\sin x$  का अवकल गुणांक  $\frac{1}{1+x}$  होगा।
- (vii)  $\log_e x$  का अवकल गुणांक  $\frac{1}{x}$  होता है।
- (viii)  $\frac{d}{dx}(\log(\tan x))$  का मान  $\operatorname{cosec} 2x$  है।
- (ix)  $\cos 2x$  का अवकलन गुणांक  $2 \sin 2x$  होता है।
- (x)  $\log \sin x$  का अवकल गुणांक है  $\cot x$
- (xi) यदि  $y = \log(\log(\log x))$  हो तो  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log x \log(\log x)}$
- (xii) किसी अचर राशि का अवकल गुणांक सदैव एक अचर होगा।

#### प्रश्न 4 सही जोड़ी बनाइए

खण्ड (अ)	खण्ड (ब)
(i) $\frac{dy}{dx} (x^n)$	(a). 81
(ii) $\frac{dy}{dx} (a^x)$	(b). $nx^{n-1}$
(iii) $(3x)^4$ का $x^4$ के सापेक्ष अवकल गुणांक	(c). $\frac{1}{2}x$
(iv) $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{4}\right)$	(d). 3
(v) $\frac{d}{dx} (3x)$	(e). $a^x \cdot \log_e a$
(vi) $\frac{d}{dx} \sec^{-1} x$	(f) $\frac{-1}{1+x^2}$
(vii) $\frac{d}{dx} \cot^{-1} x$	(g) $\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

#### प्रश्न 5. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए।

- (i) यदि  $y = \sin^{-1} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right)$  तब  $\frac{dy}{dx}$  क्या होगा ?
- (ii)  $\log x$  का अवकलज लिखिए।
- (iii) यदि  $f(x) = x \cos x + e^x$  तो  $f'(0)$  का मान क्या होगा ?
- (iv) यदि  $y = ax^2 + b$  तब  $\frac{dy}{dx}$  का मान  $x = 2$  पर क्या होगा ?
- (v)  $\sin x$  का अवकल गुणांक क्या होगा ?
- (vi)  $\log_e x$  का अवकल गुणांक क्या होगा ?
- (vii)  $\tan^{-1} x$  का अवकल गुणांक क्या होगा ?
- (viii)  $\sin^{-1} x$  का अवकल गुणांक क्या होगा ?
- (ix)  $x^n$  का अवकल गुणांक क्या होगा ?
- (x)  $x = 3$  पर फलन  $f(x) = 2x^2 - 1$  के सततता की जाँच कीजिए।
- (xi) फलन  $f(x) = |x - 5|$  सततता है कि नहीं जाँच कीजिए।
- (xii) फलन  $\cos(\sin x)$  को  $x$  के सापेक्ष अवकलित कीजिए।
- (xiii)  $ax + by^2 = \cos y$  का  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए।
- (xiv)  $\frac{e^x}{\sin x}$  को  $x$  के सापेक्ष अवकलित कीजिए।
- (xv)  $x^2 + 2x + 3$  फलन का द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए।
- (xvi) यदि  $f$  सतत हो तो  $|f|$  भी सतत होगा क्यों ?
- (xvii) फलन  $x^{20}$  का द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए।
- (xviii) फलन  $\log x$  का द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए।

#### 2 अंकीय प्रश्न:

- 6) cosine, cosecant, secant और cotangent फलनों के विचार कीजिए कि कौन सतत है या असतत ?
- 7) दर्शाइए कि  $f(x) = \cos x^2$  द्वारा परिभाषित फलन एक सतत फलन है ?
- 8) जाँच कीजिए कि क्या  $\sin |x|$  एक सतत फलन है ?

- 9)  $f(x) = |x| - |x - 1|$  द्वारा परिभाषित है, फलन के सभी असतत के बिंदु को जात कीजिए।
- 10) जॉच कीजिए कि क्या  $f(x) = \begin{cases} kx^2; & x \leq 2 \\ k & \end{cases}$  द्वारा परिभाषित फलन  $x = 2$  पर सतत है?
- 11)  $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$  का  $\frac{dy}{dx}$  जात कीजिए।
- 12)  $y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$  का  $\frac{dy}{dx}$  जात कीजिए।
- 13)  $y = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}), -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$  का  $\frac{dy}{dx}$  जात कीजिए।
- 14)  $y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), -1 < x < 1$  का  $\frac{dy}{dx}$  जात कीजिए।
- 15)  $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^{2-1}}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$  का  $\frac{dy}{dx}$  जात कीजिए।
- 16)  $\cos(\log x + e^x)$  का  $\frac{dy}{dx}$  क्या होगा?
- 17)  $x = \cos\theta - \cos 2\theta$  तथा  $y = \sin\theta - \sin 2\theta$  तब  $\frac{dy}{dx}$  जात कीजिए।

### 3 अंकीय प्रश्न:

- 18)  $y = 5\cos x - 3\sin x$  है तो सिद्ध कीजिए कि  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$
- 19)  $\log(\log x)$  का  $\frac{d^2y}{dx^2}$  जात कीजिए।
- 20)  $y^x = x^y$  तब  $\frac{dy}{dx}$  का मान क्या होगा?
- 21) क्या फलन  $f(x) = x^2 - \sin x + 5, x = \pi$  सतत है?
- 22) फलन  $\sin(\log x)$  का द्वितीय कोटि के अवकलज जात कीजिए।
- 23) यदि  $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$  है तो  $\frac{dy}{dx}$  जात कीजिए।
- 24) यदि  $x = at^2, y = 2at$  है तो  $\frac{dy}{dx}$  जात कीजिए।
- 25) फलन  $e^{6x}\cos 3x$  का द्वितीय कोटि के अवकलज जात कीजिए।
- 26) फलन  $x \cos x$  का द्वितीय कोटि के अवकलज जात कीजिए।
- 27) फलन  $\tan^{-1}x$  का द्वितीय कोटि के अवकलज जात कीजिए।
- 28) फलन  $\sin(\log x)$  का द्वितीय कोटि के अवकलज जात कीजिए।

### 4 अंकीय प्रश्न:

29)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos kx}{x \sin x} & \text{जहाँ } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{जहाँ } x = 0 \end{cases}, x = 0$  पर सतत है तो  $k$  का मान जात कीजिए।

30) यदि  $x \sin(a+y) + \sin a \cos(a+y) = 0$  हो तो सिद्ध कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

31)  $k$  का मान जात कीजिए यदि फलन  $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right); & x \neq 0 \\ k & ; x = 0 \end{cases}, x = 0$  पर सतत है।

32) यदि  $x = a \cos^3\theta, y = a \sin^3\theta$  तो  $\frac{d^2y}{dx^2}$  का मान  $\theta = \frac{\pi}{6}$  पर जात कीजिए।

33)  $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$  का  $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$  के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

- 34) यदि  $xy = e^{x-y}$  तो  $\frac{dy}{dx}$  का मान ज्ञात कीजिए।
- 35) यदि  $x = a(\theta + \sin\theta)$ ,  $y = a(1 - \cos\theta)$  हैं तो  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए।
- 36) यदि  $e^x(x+1) = 1$  है तो दर्शाइए कि  $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$
- 37) यदि  $x^y + y^x = 1$  है तो  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए।
- 38) यदि  $(\cos x)^y = (\cos y)^x$  है तो  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए।
- 39) यदि  $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x + x^{(x+\frac{1}{x})}$  तो  $\frac{dy}{dx}$  का मान ज्ञात कीजिए।
- 40) यदि  $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$  तो  $\frac{dy}{dx}$  का मान ज्ञात कीजिए।
- 41) यदि  $y = x^x - 2^{\sin x}$  तो  $\frac{dy}{dx}$  का मान ज्ञात कीजिए।

## अध्याय-6

### अवकलज के अनुप्रयोग

#### प्रश्न क्रमांक 1- सही विकल्प चुनकर लिखिए।

- (i) एक वृत की तुज्या  $r = 6\text{cm}$  पर  $r$  के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है :
- (a)  $10\pi$  (b)  $12\pi$  (c)  $8\pi$  (d)  $11\pi$
- (ii) एक उत्पाद की ग इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रूपयों में  $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$  से प्रदत्त है, जब  $x = 15$  है तो सीमांत आय है :
- (a) 116 (b) 96 (c) 90 (d) 126
- (iii) निम्नलिखित में कौन से फलन  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  में निरंतर हासमान नहीं है :
- (a)  $\cos x$  (b)  $\cos 2x$  (c)  $\cos 3x$  (d) इनमें से कोई नहीं
- (iv) निम्नलिखित अंतरालों में से किस अंतराल में  $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$  द्वारा प्रदत्त फलन  $f$  निरंतर हासमान है :
- (a)  $(0,1)$  (b)  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  (c)  $(0, \frac{\pi}{2})$  (d) इनमें से कोई नहीं
- (v) निम्नलिखित में से किस अंतराल में  $y = x^2 e^{-x}$  वर्धमान है ?
- (a)  $(-\infty, \infty)$  (b)  $(-2, 0)$  (c)  $(2, \infty)$  (d)  $(0, 2)$
- (vi)  $x$  के सभी वास्तविक मानों के लिए  $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$  का न्यूनतम मान है :
- (a) 0 (b) 1 (c) 3 (d)  $\frac{1}{3}$
- (vii)  $[x(x-1) + 1]^{\frac{1}{3}}$  का उच्चतम मान है :
- (a)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$  (b)  $\frac{1}{2}$  (c) 1 (d) 0
- (viii) एक  $10\text{ m}$  त्रिज्या के बेलनाकार टंकी में  $314\text{ m}^3/\text{h}$  की दर से गेहूँ भरा जाता है। भरे गए गेहूँ की गहराई की वृद्धि दर है:
- (a)  $1\text{ m/h}$  (b)  $0.1\text{ m/h}$  (c)  $1.1\text{ m/h}$  (d)  $0.5\text{ m/h}$

### प्रश्न क्रमांक 2. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए।

- (i) रेखा  $y = mx + 1$  वक्र  $y^2 = 4x$  की स्पर्श रेखा है तो  $m$  का मान क्या है?
- (ii)  $[x(x-1)+1]^{\frac{1}{3}}$ ,  $0 \leq x \leq 1$  का उच्चतम मान क्या है?
- (iii)  $x$  के सभी वास्तविक मानों के लिए  $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$  का न्यूनतम मान क्या है?
- (iv) वक्र  $x^2 = 2y$  पर  $(0, 5)$  से न्यूनतम दूरी पर स्थित बिन्दु लिखिए।
- (v)  $x = e$  पर फलन  $f(x) = \frac{\log x}{x}$  का मान उच्चतम या निम्नतम है अथवा नहीं?

### प्रश्न क्रमांक 3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

- (i) एक  $10m$  तृज्या के बेलनाकार टंकी में  $314 m^2/h$ , की दर से गेहूँ भरा जाता है, भरे गए गेहूँ की गहराई की वृद्धि दर ..... है।
- (ii) दिए हुए पृष्ठ एवं महत्तम आयतन के बेलन की ऊँचाई, आधार के व्यास के ..... होती है।
- (iii) फलन  $f$  के प्रान्त में एक बिंदु  $c$  जिस पर या तो  $f'(c) = 0$  या  $f$  अवकलनीय नहीं है, यह बिंदु  $f$  का ..... बिंदु कहलाता है।

### प्रश्न क्रमांक 4. निम्न लिखित में से सत्य/असत्य लिखिए :

- (i) किसी उत्पाद की  $x$  इकाईयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रूपए में  $R(x) = 3x^2 + 6x + 5$  से प्रदत्त है, जब  $x = 5$  है तो सीमांत आय 36 रु. होगी।
- (ii) ऐसी दो धन संख्याएँ जिनका योग  $k$  है और जिनके वर्गों का योग न्यूनतम हो तो ये संख्याएँ  $\frac{k}{2}, \frac{k}{2}$  होंगी।
- (iii) वृत के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी तृज्या  $r$  के सापेक्ष  $9\pi cm^2$  होगी जबकि  $r = 5cm$
- (iv)  $f(x) = \frac{\log x}{x}$  द्वारा प्रदत्त फलन  $x = e$  पर उच्चतम होगा।
- (v) यदि  $f$ ,  $[a, b]$  पर परिभाषित एक फलन है कि सभी  $x \in (a, b)$  के लिए  $f'(x) > 0$  है तो  $(a, b)$  पर  $f$  एक ह्रासमान फलन होगा।

### 2 अंकीय प्रश्न:

**प्रश्न 6.** एक 5 मीटर लंबी सीढ़ी दीवार से टिकी है। सीढ़ी के निचले सिरे को दीवार से  $3 cm/s$  की दर से हटाया जाता है सीढ़ी की दीवार पर ऊँचाई किस दर से कम होगी जब इसका निचला सिरा दीवार से 4 मी.दूर हो।

**प्रश्न 7.** सिद्ध कीजिए कि एक दिए हुए वृत में खींचे गए सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल उच्चिष्ठ होता है।

**प्रश्न 8.** दो धनात्मक संख्याएँ  $x$  और  $y$  ज्ञात कीजिए जिनका योग 35 और गुणनफल महत्तम हो।

**प्रश्न 9.** फलन  $\sin x + \cos x$  का महत्तम मान ज्ञात कीजिए।

**प्रश्न 10.** यदि अंतराल  $[0,2]$  में  $x = 1$  पर फलन  $x^4 - 62x^2 + ax + 9$  उच्चतम मान प्राप्त करता है तो  $a$  का मान ज्ञात कीजिए।

### 3 अंकीय प्रश्न:

**प्रश्न.11.** सिद्ध कीजिए  $f(x) = \sin x$  से प्रदत्त फलन

- (i)  $(0, \frac{\pi}{2})$  में निरंतर वर्धमान है (ii)  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  में निरंतर ह्रासमान है
- (iii)  $(0, \pi)$  में न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

**प्रश्न.12.** अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें  $f(x) = 2x^2 - 3x$  से प्रदत्त फलन  $f$

(i) निरंतर वर्धमान है (ii) निरंतर ह्रासमान है

**प्रश्न.12.** अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$  से प्रदत्त फलन

(i) निरंतर वर्धमान है (ii) निरंतर ह्रासमान है

**प्रश्न.13.**  $a$  का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए अंतराल  $[1, 2]$  में  $f(x) = x^2 + ax + 1$  से प्रदत्त फलन निरंतर वर्धमान है।

**प्रश्न.14.** सिद्ध कीजिए कि फलन  $f(x) = \log \sin x, (0, \frac{\pi}{2})$  और  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  में निरंतर ह्रासमान है।

**प्रश्न.15.** सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अंतर्गत महत्तम वक्रपृष्ठ वाले लंब वृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है।

**प्रश्न.16.**  $100\text{cm}^3$  आयतन वाले डिब्बे सभी बंद बेलनाकार (लंब-वृत्तीय) डिब्बों में से न्यूनतम पृष्ठ क्षेत्रफल वाले डिब्बे की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

**प्रश्न.17.** ऐसी दो धन संख्याएँ  $x$  और  $y$  ज्ञात कीजिए ताकि  $x + y = 60$  और  $xy^3$  उच्चतम हो।

**प्रश्न 18.**  $f(x) = x^3 - 3x + 3$  द्वारा प्रदत्त फलन के लिए स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम के सभी बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

#### 4 अंकीय प्रश्न:

**प्रश्न 19.** सिद्ध कीजिए कि दिए हुए पृष्ठ और महत्तम आयतन वाले लंब वृत्तीय शंकु का अर्ध शीर्ष कोण  $\sin^{-1}(\frac{1}{3})$  होता है।

**प्रश्न 20.** सिद्ध कीजिए कि  $r$  त्रिज्या के गोले के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई  $\frac{4r}{3}$  है।

**प्रश्न 21.** सिद्ध कीजिए कि  $R$  त्रिज्या के गोले के अंतर्गत विशालतम शंकु का आयतन गोले के आयतन का  $\frac{8}{27}$  होता है।

**प्रश्न 22.** सिद्ध कीजिए कि न्यूनतम पृष्ठ का दिए आयतन के लंब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई आधार की त्रिज्या की  $\sqrt{2}$  गुनी होती है।

**प्रश्न 23.** एक वृत और एक वर्ग के परिमापों का योग  $k$  है, जहाँ  $k$  एक अचर है सिद्ध कीजिए कि उनके क्षेत्रफलों का योग निम्नतम है, जब वर्ग की भुजा वृत की त्रिज्या की दुगुनी है

**प्रश्न 24.** सिद्ध कीजिए कि दी हुई त्रियक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु अर्द्ध शीर्ष कोण  $\tan^{-1}\sqrt{2}$  होता है।

**प्रश्न 25.** सिद्ध कीजिए कि  $R$  त्रिज्या के गोले के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई  $\frac{2R}{\sqrt{3}}$  है। अधिकतम आयतन भी ज्ञात कीजिए।

**प्रश्न 26.** त्रिभुज की भुजाओं से  $a$  और  $b$  दूरी पर त्रिभुज के कर्ण पर स्थित एक बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि कर्ण की न्यूनतम लम्बाई  $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$  है।

**प्रश्न 27.** पानी की एक टंकी का आकार, उर्ध्वाधर अक्ष वाले एक उल्टे लम्ब वृत्तीय शंकु है जिसका शीर्ष कोण  $\tan^{-1}(0.5)$  है। इसमें  $5\text{m}^3/\text{min}$  की दर से पानी भरा जाता है। पानी के स्तर बढ़ने की दर उस क्षण ज्ञात कीजिए जब टंकी में पानी की ऊँचाई  $10\text{m}$  है।

**प्रश्न 28.** सिद्ध कीजिए कि  $\tan^{-1}(\sin x + \cos x)$ ,  $x > 0$  से प्रदत्त फलन  $f$ ,  $(0, \frac{\pi}{4})$  में निरंतर वर्धमान फलन है।